PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : THÉORÈME DE LIE-KOLCHIN

TONY LIMAGNE

Résumé. On sait que des endomorphismes trigonalisables qui commutent deux-à-deux entre eux sont cotrigonalisables. La réciproque est cependant fausse, ce qui laisse espérer qu'on peut établir un résultat analogue sous des hypothèses plus faibles : c'est le but du théorème du Lie-Kolchin. C'est un développement original à plusieurs titres. Tout d'abord, parce qu'il mèle algèbre et analyse. Ensuite, parce que sa preuve met en exergue l'une des plus importantes stratégies de l'algèbre linéaire – la recherche de sous-espaces stables – que la connexité vient joliment illustrer.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 204, 150, 151, 153, 156 et 106.

1. Préliminaires

On fixe E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Un élément de $L(E)$ est en particulier toujours trigonalisable. On se donne un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(E)$ non réduit à $\{\mathrm{id}_E\}$.

Proposition 1. Si G est abélien alors il existe une base de E qui trigonalise simultanément tous les éléments de G (et donc en particulier il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de G).

Démonstration. Par récurrence forte sur la dimension de E. Le cas où $\dim(E) = 1$ est trivial. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition 1 vraie dans tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $1, \dots, n-1$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et soit G un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}(E)$. Si tous les éléments de H sont des homothéties de E, on fixe une base de E qui est bien une base de cotrigonalisation. Supposons que G contienne un élément u qui ne soit pas une homothétie de E. Par le lemme des noyaux on décompose E en somme de sous-espaces caractéristiques

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F_\lambda.$$

Comme u n'est pas une homothétie de E chaque F_λ est de dimension strictement inférieure à n. Fixons $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme G est abélien et que F_λ est stable par u alors les éléments de G stabilisent F_λ de sorte qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au groupe

$$G_\lambda = \{v_{|\mathrm{F}_\lambda}, v \in \mathrm{G}\} \subseteq \mathrm{GL}(F_\lambda).$$

Les éléments de G_λ sont donc cotrigonalisables. On note $\mathcal{B}_\lambda$ une base de cotrigonalisation sur F_λ des éléments de G_λ. La famille

$$\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda,$$

est une base de cotrigonalisation des éléments de G sur E. $\square$

Date: Année 2025.

Remarque 2. La proposition 1 s'étend à tous sous-ensemble de $L(E)$ dont les éléments commutent deux à deux. (La structure de groupe est inutile ici.)

Référence : [G, Chap. 4, §1.6, Exercice 4].

On note $D(G)$ le groupe dérivé de G. On définit alors par récurrence

$$D^0(G) = G, D^1(G) = D(G), D^2(G) = D(D(G)), \ldots, D^n(G) = D(D^{n-1}(G)),$$

et on dit que G est *résoluble* s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^l(G) = \{\mathrm{id}_E\}$; ceci est encore équivalent à l'existence d'une liste de sous-groupes $G_1, \ldots, G_r$ de G tels que

$$\{\mathrm{id}_E\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_r = G,$$

où tous les groupes quotients G_{i+1}/G_i sont abéliens (voir par exemple [C, Chap. VII, §2A, Théorème 7.25]).

Lemme 3. Si G est connexe alors $D(G)$ est une partie connexe de G.

Démonstration. L'image X de l'application continue

$$G \times G \to G, (u, v) \mapsto uvu^{-1}v^{-1},$$

est connexe. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble

$$P_r = \{\text{produits de } r \text{ commutateurs de } G\},$$

est une partie connexe de G car l'application $X^r \to P_r, (c_1, \ldots, c_r) \mapsto c_1 \cdots c_r$ est continue. Enfin, vu que pour tout $s \neq r$ dans $\mathbb{N}^*$ on a $P_r \cap P_s \neq \emptyset$ alors

$$D(G) = \bigcup_{r=1}^{+\infty} P_r,$$

est une partie connexe de G. □

Référence : [CG, Chap. IV, §B, Exercice B.6].

2. Développement

Proposition 4. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Si G est un groupe connexe résoluble alors il existe un sous-espace vectoriel G-stable de E distinct de $\{0\}$ et E.

Démonstration. Comme G est résoluble alors par définition

$$\text{(P)} \qquad \exists l \in \mathbb{N}^*, \quad D^l(G) = \{\mathrm{id}_E\}.$$

Soit l le plus petit entier strictement positif vérifiant la propriété (P). Si $l = 1$ alors G est abélien et on conclut par la proposition 1.(2)(b). Supposons donc $\ell \geqslant 2$ et posons $H = D^{l-1}(G)$. Par minimalité de l on a

$$H \neq \{\mathrm{id}_E\}.$$

On a aussi $D(H) = \{\mathrm{id}_E\}$ c'est-à-dire que H est abélien. D'après la proposition 1.(2)(a), l'ensemble

$$P = \{\text{vecteurs propres communs à tous les éléments de } H\},$$

est non vide. Fixons $v \in P$ et posons

$$V = \mathrm{Vect}(\{g(v) : g \in G\}).$$

Par définition, V est bien G-stable et distinct de $\{0_E\}$ (car $v \in V$). On note

$$\lambda : H \to \mathbb{C}, h \mapsto \text{valeur propre de } h \text{ associée à } v.$$

Fixons $h \in H$ et soit $g \in G$. Comme H est distingué dans G alors l'application

$$\phi_h : \left\{ \begin{array}{lllll} G & \to & H & \to & \mathbb{C}, \\ g & \mapsto & g^{-1}hg & \mapsto & \lambda(g^{-1}hg). \end{array} \right.$$

est bien définie, et même continue comme composée d'applications linéaires [1]. Et puisque G est connexe alors $\phi_h(G)$ est une partie connexe. Or $\phi_h(G)$ est un ensemble fini car inclus dans le spectre de h de sorte que

$$\phi_h(G) = \{\lambda(h)\}.$$

Toujours du fait que $g^{-1}hg \in H$ on a

$$h(g(v)) = \lambda(g^{-1}hg)g(v),$$

donc $h_{|V}$ est une homothétie de V de rapport $\lambda(h)$. Par l'absurde, supposons $E = V$. Alors h s'écrit à la fois $h = \lambda(h)\mathrm{Id}_E$ et aussi, puisque $l \geqslant 2$

$$h = c_1 \cdots c_r,$$

où $c_1, \ldots, c_r$ sont des commutateurs de G. Dès lors on a

$$\lambda(h)^n = \det(h) = \prod_{i=1}^{r} \det(c_i) = \prod_{i=1}^{r} 1 = 1,$$

ce qui impose un nombre de choix fini pour $\lambda(h)$, donc aussi pour $h : H$ est fini. Or par le lemme 3 et une récurrence immédiate H est aussi une partie connexe, et donc H est réduit à un point qui ne peut qu'être id_E. Absurde. □

Théorème 5 (Lie-Kolchin)**.** Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Si G est un groupe connexe résoluble alors tous les éléments de G sont cotrigonalisables.

Démonstration. On procède par récurrence forte sur la dimension de E. Le cas $n = 1$ est trivial. On suppose le théorème 5 vrai dans les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension $p = 1, \ldots, n-1$ pour un certain $n \geqslant 2$. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et G un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(E)$. Soient V un sous-espace vectoriel G-stable de E non trivial (donné par la proposition 4) et W un supplémentaire de V dans E. On note

$$k = \dim(V) \in [\![1, n-1]\!].$$

1. Il est clair que $G \to H, g \mapsto ghg^{-1}$ est continue sur G. Justifions le continuité de λ. Comme $v \neq 0$, on peut compléter (v) en une base $\mathcal{B} = (v_1 = v, \ldots, v_n)$ de E et écrire λ comme composée d'applications linéaires, à savoir

$$H \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, h \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda(h) & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \star \\ 0 & & \end{pmatrix} \mapsto \lambda(h).$$

On fixe $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en concaténant une base $\mathcal{B}_V$ de V et une base $\mathcal{B}_W$ de W. Pour tout $g \in G$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} P(g) & \star \\ 0 & Q(g) \end{pmatrix},$$

où $P(g) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ et $Q(g) \in \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{C})$. Par opérations sur les blocs, les applications

$$P : G \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}), g \mapsto P(g) \quad \text{et} \quad Q : G \to \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{C}), g \mapsto Q(g),$$

sont des morphismes de groupes. On note

$$\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V) \qquad \text{et} \qquad \rho_W : G \to \mathrm{GL}(W),$$

les applications définies par les relations

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_V}(\rho_V(g)) = P(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W}(\rho_W(g)) = Q(g).$$

Il est facile de voir que ρ_V et ρ_W sont des morphismes de groupes continus si bien que :

(1) $\rho_V(G)$ est un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(V)$;
(2) $\rho_W(G)$ est un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(W)$;

car G est un groupe connexe et résoluble. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence sur $k < n$ et $n - k < n$:

(1) il existe une base de V qui trigonalise simultanément les éléments de $\rho_V(G)$;
(2) il existe une base de W qui trigonalise simultanément les éléments de $\rho_W(G)$;

En concaténant ces deux bases, on obtient une base de E qui trigonalise simultanément les éléments de G, ce qui clôt la récurrence. $\square$

Référence : [CG, Chap. IV, §B, Exercice B.6].

3. Mise en perspective

Exemple 6. On note B le groupe des matrices triangulaires inversibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on sait que B est connexe. Le groupe B est également résoluble. En effet, un commutateur de $D^k(B)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ est une matrice par bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & I_{k-1} & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \star \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

En poussant jusqu'à l'entier n on a bien $D^n(B) = \{I_n\}$. Le théorème de Lie-Kolchin affirme donc que les éléments de B sont cotrigonalisables. En fait B est, à conjugaison près, le seul sous-goupe connexe résoluble maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisqu'il est facile de voir qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable si et seulement s'il est conjugué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à un sous-groupe de B.

Référence : [CG, Chap. IV, §B, Exercice B.7].

Remarque 7. L'hypothèse de connexité dans le théorème de Lie-Kolchin est essentiel. Par exemple on sait que le groupe diédral $\mathcal{D}_n$ de degré n n'est pas une partie connexe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Pourtant $\mathcal{D}_n$ est résoluble et s'il existait une base de cotrigonalisable pour les éléments de $\mathcal{D}_n$ alors ceux-ci stabiliseraient une droite vectorielle. Or par le théorème de Maschke, ils stabiliseraient aussi un supplémentaire de cette droite, donc le plan complexe entier : $\mathcal{D}_n$ serait donc abélien (prendre $n \geqslant 3$).

4. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

En ce qui concerne la proposition 4...

(1) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E trigonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que les u_i possèdent un vecteur propre en commun.

(2) Soit E un espace métrique et A une partie finie, non vide et connexe de E. Montrer que A ne contient qu'un seul élément.

En ce qui concerne le théorème 5...

(3) Soit $g \in G$. Pourquoi $P(g)$ et $Q(g)$ sont-elles des matrices inversibles ?

(4) Justifier que ρ_V et ρ_W sont continus sur G.

(5) Montrer que si G est un groupe résoluble et $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes alors $f(G)$ est résoluble.

Références

[CG] Ph. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et géométries*, Vol. 1, Calvage & Mounet, 2017.

[G] X. Gourdon, *Algèbre et probabilités*, 3$^{\text{e}}$ édition, Ellipses, 2020.

[C] J. Calais, *Éléments de théorie des groupes*, PUF, 2014.